MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

22. rujna 2013.

Dekompozicija kvadra

- **Zatvoreni** n**-dimenzionalni kvadar** K je kartezijev produkt od n zatvorenih segmenata:

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Dekompozicija kvadra

- **Zatvoreni** n**-dimenzionalni kvadar** K je kartezijev produkt od n zatvorenih segmenata:

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

  $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

- Neka je $D_i = \left\{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right\}$ jedan rastav segmenta $[a_i, b_i]$, tj.

$$a_i = x_0^{(i)} \leq x_1^{(i)} \leq x_2^{(i)} \leq \cdots \leq x_{n-1}^{(i)} \leq x_n^{(i)} = b_i.$$

  S $\mathcal{D}_i$ označimo skup svih rastava segmenta $[a_i, b_i]$.

Dekompozicija kvadra

- **Zatvoreni** n**-dimenzionalni kvadar** K je kartezijev produkt od n zatvorenih segmenata:

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

  $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

- Neka je $D_i = \left\{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right\}$ jedan rastav segmenta $[a_i, b_i]$, tj.

$$a_i = x_0^{(i)} \leq x_1^{(i)} \leq x_2^{(i)} \leq \cdots \leq x_{n-1}^{(i)} \leq x_n^{(i)} = b_i.$$

  S $\mathcal{D}_i$ označimo skup svih rastava segmenta $[a_i, b_i]$.

- Kartezijev produkt

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots D_n, \text{ gdje je } D_i \in \mathcal{D}_i,$$

  zove se **rastav (dekompozicija) kvadra** K. Skup svih rastava kvadra K označit ćemo s $\mathcal{D}$.

Definicija

Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija, tj. postoje* $m, M \in \mathbb{R}$ *takvi da je*

$$m \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M, \qquad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K.$$

Integralne sume

Definicija

Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija, tj. postoje* $m, M \in \mathbb{R}$ *takvi da je*

$$m \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M, \qquad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K.$$

Svakom rastavu $D \in \mathcal{D}$ *kvadra* K *možemo pridružiti* **gornju integralnu sumu**

$$g(f, D) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{k_n} M_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \left(x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1-1}^{(1)}\right) \left(x_{i_2}^{(2)} - x_{i_2-1}^{(2)}\right) \cdots \left(x_{i_n}^{(n)} - x_{i_n-1}^{(n)}\right),$$

gdje je

$$M_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \sup \left\{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in \left[x_{i_k-1}^{(k)}, x_{i_k}^{(k)}\right] \right\},$$

Integralne sume

Definicija

Analogno definiramo **donju integralnu sumu**

$$d(f, D) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{k_n} m_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \left(x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1-1}^{(1)} \right) \left(x_{i_2}^{(2)} - x_{i_2-1}^{(2)} \right) \cdots \left(x_{i_n}^{(n)} - x_{i_n-1}^{(n)} \right),$$

gdje je

$$m_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \inf \left\{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in \left[x_{i_k-1}^{(k)}, x_{i_k}^{(k)} \right] \right\},$$

Definicija

Ako je

$$\inf\left\{g\left(f, D\right) : D \in \mathcal{D}\right\} = \sup\left\{d\left(f, D\right) : D \in \mathcal{D}\right\} = I,$$

onda se broj I *naziva* **određeni (višestruki, n-terostruki) integral funkcije f na kvadru K.**

Definicija

Ako je

$$\inf\left\{g\left(f,D\right):D\in\mathcal{D}\right\}=\sup\left\{d\left(f,D\right):D\in\mathcal{D}\right\}=I,$$

onda se broj I naziva **određeni (višestruki, n-terostruki) integral funkcije f na kvadru K.**
Tada kažemo da je f **integrabilna** *na K i pišemo*

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_K f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \\ &= \underset{K}{\int\cdots\int} f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

Primjer

Izračunajmo dvostruki integral funkcije $f : [0,4] \times [0,3] \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$f(x,y) = 3 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}.$$

Primjer

Izračunajmo dvostruki integral funkcije $f : [0,4] \times [0,3] \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$f(x,y) = 3 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}.$$

Primjetimo da se radi o dijelu ravnine $z = 3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y$ *koji se nalazi iznad kvadra (pravokutnika)*

$$K = [0,4] \times [0,3].$$

Primjer

Izračunajmo dvostruki integral funkcije $f : [0,4] \times [0,3] \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$f(x,y) = 3 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}.$$

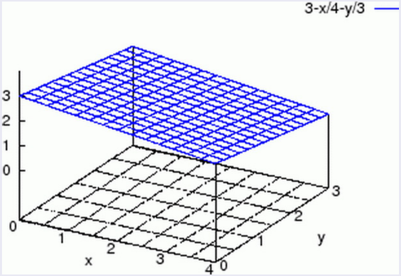
Primjetimo da se radi o dijelu ravnine $z = 3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y$ *koji se nalazi iznad kvadra (pravokutnika)*

$$K = [0,4] \times [0,3].$$

Vrhovi tog prostornog pravokutnika su točke $(0,0,3)$, $(4,0,1)$, $(0,3,2)$ *i* $(4,3,0)$.

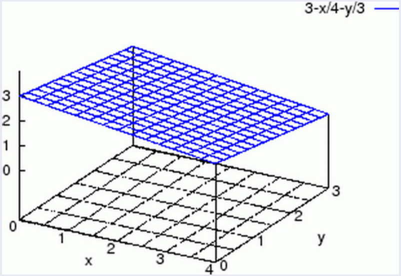
Primjer

Na slici se vidi jedan rastav kvadra (pravokutnika) na 48 dijelova:



Primjer

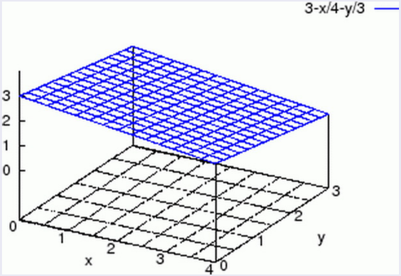
Na slici se vidi jedan rastav kvadra (pravokutnika) na 48 dijelova:



segment $[0, 4]$ *je rastavljen na osam, a segment* $[0, 3]$ *na šest dijelova.*

Primjer

Na slici se vidi jedan rastav kvadra (pravokutnika) na 48 dijelova:



segment $[0,4]$ *je rastavljen na osam, a segment* $[0,3]$ *na šest dijelova. Na svakom dijelu* $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ *funkcija očito postiže maksimum u prednjem lijevom, a minimum u stražnjem desnom uglu:*

Primjer

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \max_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f\left(x,y\right) = f\left(x_{i-1},y_{j-1}\right) = 3-\frac{x_{i-1}}{4}-\frac{y_{j-1}}{3}, \\ m_{i,j} &= \min_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f\left(x,y\right) = f\left(x_i,y_j\right) = 3-\frac{x_i}{4}-\frac{y_j}{3}. \end{aligned}$$

Primjer

$$M_{i,j} = \max_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y) = f(x_{i-1},y_{j-1}) = 3 - \frac{x_{i-1}}{4} - \frac{y_{j-1}}{3},$$

$$m_{i,j} = \min_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y) = f(x_i,y_j) = 3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}.$$

Uz oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *i* $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, *donja suma je jednaka*

$$d(f,D) = \sum_i \sum_j f(x_i,y_i)\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_i \sum_j \left(3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}\right) \Delta x_i \Delta y_j =$$

Primjer

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \max_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y) = f(x_{i-1},y_{j-1}) = 3 - \frac{x_{i-1}}{4} - \frac{y_{j-1}}{3}, \\ m_{i,j} &= \min_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y) = f(x_i,y_j) = 3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}. \end{aligned}$$

Uz oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *i* $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, *donja suma je jednaka*

$$d(f,D) = \sum_i \sum_j f(x_i,y_i)\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_i \sum_j \left(3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}\right) \Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= 3 \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j - \frac{1}{4} \sum_j \Delta y_j \sum_i x_i \Delta x_i - \frac{1}{3} \sum_i \Delta x_i \sum_j y_j \Delta y_j =$$

Primjer

$$M_{i,j} = \max_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y) = f(x_{i-1},y_{j-1}) = 3 - \frac{x_{i-1}}{4} - \frac{y_{j-1}}{3},$$

$$m_{i,j} = \min_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y) = f(x_i,y_j) = 3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}.$$

Uz oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *i* $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, *donja suma je jednaka*

$$d(f,D) = \sum_i \sum_j f(x_i,y_i)\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_i \sum_j \left(3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}\right)\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= 3\sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j - \frac{1}{4}\sum_j \Delta y_j \sum_i x_i \Delta x_i - \frac{1}{3}\sum_i \Delta x_i \sum_j y_j \Delta y_j =$$

$$= 3\cdot 12 - \frac{3}{4}\sum_i x_i \Delta x_i - \frac{4}{3}\sum_j y_j \Delta y_j.$$

Primjer

Prelaskom na limes kada $\Delta x_i \to 0$ i $\Delta y_j \to 0$ i korištenjem definicije određenog integrala funkcije jedne varijable imamo

$$\sup d\left(f, D\right) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} d\left(f, D\right) = 36 - \frac{3}{4}\int_0^4 x\,\mathrm{dx} - \frac{4}{3}\int_0^3 y\,\mathrm{dy} = 24.$$

Višestruki integral

Primjer

Prelaskom na limes kada $\Delta x_i \to 0$ i $\Delta y_j \to 0$ i korištenjem definicije određenog integrala funkcije jedne varijable imamo

$$\sup d(f,D) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} d(f,D) = 36 - \frac{3}{4}\int_0^4 x\,\mathrm{dx} - \frac{4}{3}\int_0^3 y\,\mathrm{dy} = 24.$$

Slično se pokaže da je

$$\inf g(f,D) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} g(f,D) = 24$$

Višestruki integral

Primjer

Prelaskom na limes kada $\Delta x_i \to 0$ i $\Delta y_j \to 0$ i korištenjem definicije određenog integrala funkcije jedne varijable imamo

$$\sup d(f, D) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} d(f, D) = 36 - \frac{3}{4} \int_0^4 x \, \mathrm{d}x - \frac{4}{3} \int_0^3 y \, \mathrm{d}y = 24.$$

Slično se pokaže da je

$$\inf g(f, D) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} g(f, D) = 24$$

pa je f integrabilna na kvadru K i vrijedi

$$\iint_K \left(3 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 24.$$

Integral nad neravnim područjem integracije

Definicija

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *omeđena funkcija i neka je* D *sadržano u nekom kvadru. Funkciju* $g : K \to \mathbb{R}$ *definiramo kao proširenje funkcije* f*:*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n), & (x_1, \ldots, x_n) \in D, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in K \setminus D. \end{cases}$$

Integral nad neravnim područjem integracije

Definicija

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *omeđena funkcija i neka je* D *sadržano u nekom kvadru. Funkciju* $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ *definiramo kao proširenje funkcije* f:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n), & (x_1, \ldots, x_n) \in D, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in K \setminus D. \end{cases}$$

Ako je g *integrabilna na* K, *onda integral funkcije* f *na* D *definiramo kao*

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_K g(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n .$$

Integral nad neravnim područjem integracije

Definicija

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *omeđena funkcija i neka je* D *sadržano u nekom kvadru. Funkciju* $g : K \to \mathbb{R}$ *definiramo kao proširenje funkcije* f*:*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n), & (x_1, \ldots, x_n) \in D, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in K \setminus D. \end{cases}$$

Ako je g *integrabilna na* K*, onda integral funkcije* f *na* D *definiramo kao*

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_K g(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n .$$

Skup D *je* **područje integracije**.

Svojstva višestrukog integrala

Ako su f i g integrabilne na području D vrijedi:

- **linearnost**, odnosno

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{dx}_1 \cdots \mathrm{dx}_n = \alpha \int_D f\,\mathrm{dx}_1 \cdots \mathrm{dx}_n + \beta \int_D g\,\mathrm{dx}_1 \cdots \mathrm{dx}_n,$$

  gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i

Svojstva višestrukog integrala

Ako su f i g integrabilne na području D vrijedi:

- **linearnost**, odnosno

$$\int\limits_D (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \alpha \int\limits_D f \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n + \beta \int\limits_D g \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

  gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i

- **integriranje po dijelovima područja integracije**, odnosno

$$\int\limits_D f \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{D_1} f \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n + \int\limits_{D_2} f \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

  gdje je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Dvostruki integral nad kvadrom

Dvostruki integral računamo uzastopnim računanjem dva jednostruka integrala pomoću Newton-Leibnitzove formule:

Dvostruki integral nad kvadrom

Dvostruki integral računamo uzastopnim računanjem dva jednostruka integrala pomoću Newton-Leibnitzove formule:

Teorem (Fubini)

Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija definirana na pravokutniku* $K = [a, b] \times [c, d]$*. Tada je*

$$\iint\limits_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Dvostruki integral nad kvadrom

Dvostruki integral računamo uzastopnim računanjem dva jednostruka integrala pomoću Newton-Leibnitzove formule:

Teorem (Fubini)

Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija definirana na pravokutniku $K = [a, b] \times [c, d]$. Tada je

$$\iint\limits_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Dokaz se temelji na činjenici da kod dvostrukih suma možemo zamijeniti poredak zbrajanja

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,.$$

Detalje dokaza izostavljamo.

Dvostruki integral nad kvadrom

Primjer

Ako je $K = [a, b] \times [c, d]$, *izračunajmo*

$$I = \iint\limits_K xy^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Dvostruki integral nad kvadrom

Primjer

Ako je $K = [a, b] \times [c, d]$, *izračunajmo*

$$I = \iint\limits_K xy^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Prema teoremu je

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\int_c^d xy^2 \,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_a^b \left[x \frac{y^3}{3} \Big|_c^d \right] \mathrm{dx} = \int_a^b x \left(\frac{d^3}{3} - \frac{c^3}{3} \right) \mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{3} \left(d^3 - c^3 \right) \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{6} \left(d^3 - c^3 \right) \left(b^2 - a^2 \right). \end{aligned}$$

Dvostruki integral nad kvadrom

Primjer

Isti rezultat dobije se i računajući

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b xy^2 \, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \, .$$

Dvostruki integral nad kvadrom

Primjer

Isti rezultat dobije se i računajući

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b xy^2 \, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} .$$

Napomena

Iz prethodnog primjera vidimo da se prvo integrira po jednoj, a zatim po drugoj varijabli, pri čemu **rezultat ne ovisi o redosljedu integriranja***. Slično vrijedi i kada područje integracije nije pravokutnik, kao i kod integrala viših dimenzija.*

Napomena

Integral iz prethodnog primjera je **integral sa separiranim varijablama**, *odnosno može se rastaviti na produkt dva jednostruka integrala što općenito nije slučaj:*

$$\int_a^b \left(\int_c^d xy^2 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b x \, \mathrm{d}x \cdot \int_c^d y^2 \, \mathrm{d}y \, .$$

Dvostruki integral nad neravnim područjem

Ako je područje integracije zadano dvama neprekidnim funkcijama,

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\},$$

onda je

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Dvostruki integral nad neravnim područjem

Ako je područje integracije zadano dvama neprekidnim funkcijama,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

onda je

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Naravno, uloge varijabli x i y mogu biti zamijenjene.

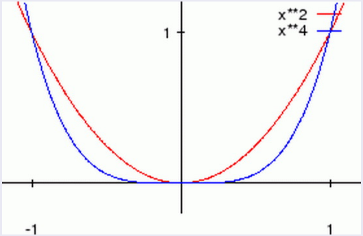
Dvostruki integral nad neravnim područjem

Primjer

Izračunajmo integral $I = \iint\limits_D \left(x + y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, *pri čemu je* D *područje omeđeno krivuljama* $y = x^2$ *i* $y = x^4$.

Primjer

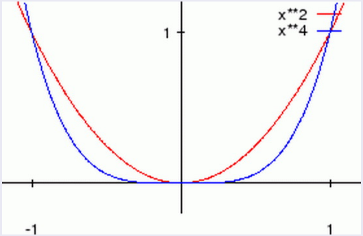
Izračunajmo integral $I = \iint\limits_D \left(x + y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, *pri čemu je* D *područje omeđeno krivuljama* $y = x^2$ *i* $y = x^4$.
Za određivanje granica integracije potrebno je skicirati područje D*:*



Dvostruki integral nad neravnim područjem

Primjer

Izračunajmo integral $I = \iint\limits_D \left(x + y^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, *pri čemu je* D *područje omeđeno krivuljama* $y = x^2$ *i* $y = x^4$.
Za određivanje granica integracije potrebno je skicirati područje D*:*



Vidimo da je

$$D = \left\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq x^2\right\}.$$

Dvostruki integral nad neravnim područjem

Primjer

Dakle

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^4}^{x^2} (x + y^2)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_x^{x^2} \mathrm{dx} = \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^3 + \frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{x^{12}}{3} \right) \mathrm{dx} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^{13}}{39} \right]_{-1}^{1} = \\ &= -\frac{1}{273}. \end{aligned}$$

Dvostruki integral nad neravnim područjem

Primjer

Dakle

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^4}^{x^2} (x + y^2)\, \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_x^{x^2} \mathrm{dx} = \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^3 + \frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{x^{12}}{3} \right) \mathrm{dx} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^{13}}{39} \right]_{-1}^{1} = \\ &= -\frac{1}{273}. \end{aligned}$$

No možemo i zamijeniti redoslijed pa integrirati prvo po varijabli x. U tom slučaju je potrebno područje D rastaviti na uniju dva disjunktna područja:

Primjer

Stavimo

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) : 0 \le y \le 1, -\sqrt[4]{y} \le x \le -\sqrt{y}\},\\
D_2 &= \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le \sqrt[4]{y}\}
\end{aligned}
$$

Dvostruki integral nad neravnim područjem

Primjer

Stavimo

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1, -\sqrt[4]{y} \le x \le -\sqrt{y}\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le \sqrt[4]{y}\right\} \end{aligned}$$

pa je

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-\sqrt[4]{y}}^{-\sqrt{y}} (x + y^2)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} (x + y^2)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \cdots = -\frac{1}{273}.$$

Volumen i površina

- Neka je podintegralna funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna te neka je područje D omeđeno s po djelovima glatkom jednostavnom zatvorenom krivuljom.

Volumen i površina

- Neka je podintegralna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna te neka je područje D omeđeno s po djelovima glatkom jednostavnom zatvorenom krivuljom.
- Tada je vrijednost pripadnog dvostrukog integrala jednaka volumenu tijela Ω koje je omeđeno bazom D (u xy-ravnini) i plohom $z = f(x, y)$

$$V(\Omega) = \iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint\limits_D zdP.$$

Volumen i površina

- Neka je podintegralna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna te neka je područje D omeđeno s po djelovima glatkom jednostavnom zatvorenom krivuljom.
- Tada je vrijednost pripadnog dvostrukog integrala jednaka volumenu tijela Ω koje je omeđeno bazom D (u xy-ravnini) i plohom $z = f(x, y)$

$$V(\Omega) = \iint\limits_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_D z dP.$$

- Izraz $dP = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ označava **element površine**, odnosno površinu pravokutnika sa stranicama $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$.

Volumen i površina

- Neka je podintegralna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna te neka je područje D omeđeno s po djelovima glatkom jednostavnom zatvorenom krivuljom.
- Tada je vrijednost pripadnog dvostrukog integrala jednaka volumenu tijela Ω koje je omeđeno bazom D (u xy-ravnini) i plohom $z = f(x, y)$

$$V(\Omega) = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D z dP.$$

- Izraz $dP = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ označava **element površine**, odnosno površinu pravokutnika sa stranicama $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$.
- Za $z = f(x, y) = 1$ dvostruki integral daje površinu područja D

$$P(D) = V(\Omega) = \iint_D dP.$$

Primjer

Izračunajmo obujam tijela omeđenog plohom $z = x^2 + y^2$ *i ravninama*

$$z = 0, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad y = 2 - x, \quad y = 4 - x.$$

Primjer

Izračunajmo obujam tijela omeđenog plohom $z = x^2 + y^2$ *i ravninama*

$$z = 0, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad y = 2 - x, \quad y = 4 - x.$$

Zadana ploha je kružni paraboloid sa središtem u ishodištu.

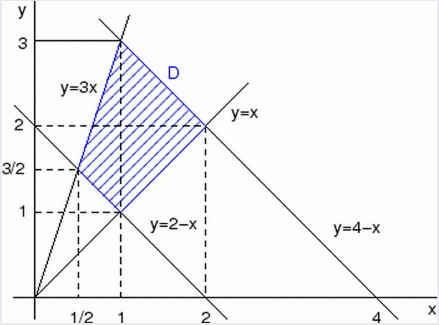
Volumen i površina

Primjer

Izračunajmo obujam tijela omeđenog plohom $z = x^2 + y^2$ i ravninama

$$z = 0, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad y = 2 - x, \quad y = 4 - x.$$

Zadana ploha je kružni paraboloid sa središtem u ishodištu.
Područje integracije u xy-ravnini je omeđeno s četiri pravca:



Primjer

Nakon što odredimo točke presjeka zadanih pravaca, područje integracije ćemo rastaviti na dva dijela, pravcem $x = 1$.

Primjer

Nakon što odredimo točke presjeka zadanih pravaca, područje integracije ćemo rastaviti na dva dijela, pravcem $x = 1$. *Sada imamo*

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{2-x}^{3x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \int_{x}^{4-x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Volumen i površina

Primjer

Nakon što odredimo točke presjeka zadanih pravaca, područje integracije ćemo rastaviti na dva dijela, pravcem $x = 1$*. Sada imamo*

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{2-x}^{3x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \int_{x}^{4-x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Alternativno, možemo D *rastaviti na tri dijela i integrirati prvo po* x*:*

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \int_{2-y}^{y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \int_{\frac{y}{3}}^{y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{2}^{3} \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Primjer

Nakon što odredimo točke presjeka zadanih pravaca, područje integracije ćemo rastaviti na dva dijela, pravcem $x = 1$. Sada imamo

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{2-x}^{3x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \int_{x}^{4-x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Alternativno, možemo D rastaviti na tri dijela i integrirati prvo po x:

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \int_{2-y}^{y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \int_{\frac{y}{3}}^{y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{2}^{3} \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Na oba načina se dobije rezultat $V = \frac{65}{8}$.

Volumen i površina

Volumen tijela Ω omeđenog plohama $z = f(x,y)$ i $z = g(x,y)$ pri čemu je

$$f, g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D,$$

se računa po formuli

$$V(\Omega) = \iint\limits_D (f(x,y) - g(x,y)) \, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}\,.$$

Volumen i površina

Volumen tijela Ω omeđenog plohama $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$ pri čemu je

$$f, g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D,$$

se računa po formuli

$$V(\Omega) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

To je prirodno poopćenje formule za računanje površine ravninskih likova pomoću jednostrukog integrala.

Polarne koordinate

Neka je područje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zadano u polarnom koordinatnom sustavu kao

$$D = \{(r, \varphi) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

gdje su $r_1, r_2 : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije.

Polarne koordinate

Neka je područje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zadano u polarnom koordinatnom sustavu kao

$$D = \{(r, \varphi) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

gdje su $r_1, r_2 : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije.
Tada za računanje dvostrukog integrala koristimo supstituciju

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

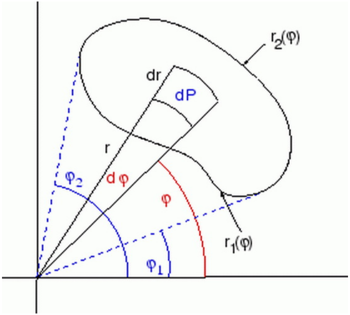
Neka je područje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zadano u polarnom koordinatnom sustavu kao

$$D = \{(r, \varphi) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

gdje su $r_1, r_2 : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije.
Tada za računanje dvostrukog integrala koristimo supstituciju

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi.$$

Element površine u polarnim kordinatama:



Polarne koordinate

Formula za površinu kružnog isječka daje

$$\begin{aligned} dP &= \frac{1}{2}(r+\mathrm{dr})^2\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(r^2+2r\,\mathrm{dr}+(\mathrm{dr})^2-r^2\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}(\mathrm{dr})^2\,\mathrm{d}\varphi \\ &\approx r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

pri čemu izraz $\frac{1}{2}(\mathrm{dr})^2\,\mathrm{d}\varphi$ možemo zanemariti jer teži k nuli brže od izraza $r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi$.

Polarne koordinate

Formula za površinu kružnog isječka daje

$$\begin{aligned} dP &= \frac{1}{2}(r+\mathrm{dr})^2\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(r^2 + 2r\,\mathrm{dr} + (\mathrm{dr})^2 - r^2\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}(\mathrm{dr})^2\,\mathrm{d}\varphi \\ &\approx r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

pri čemu izraz $\frac{1}{2}(\mathrm{dr})^2\,\mathrm{d}\varphi$ možemo zanemariti jer teži k nuli brže od izraza $r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi$. Prema tome, vrijedi

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Formula za površinu kružnog isječka daje

$$\begin{aligned} dP &= \frac{1}{2}\left(r+\mathrm{dr}\right)^2 \mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(r^2 + 2r\,\mathrm{dr} + (\mathrm{dr})^2 - r^2\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\left(\mathrm{dr}\right)^2 \mathrm{d}\varphi \\ &\approx r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

pri čemu izraz $\frac{1}{2}\left(\mathrm{dr}\right)^2 \mathrm{d}\varphi$ možemo zanemariti jer teži k nuli brže od izraza $r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi$. Prema tome, vrijedi

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

U polarnim koordinatama se integrira prvo po r pa onda po φ!

Polarne kordinate

Primjer

Ako je D polukrug u prvom kvadrantu omeđen kružnicom $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ i osi x, izračunajte

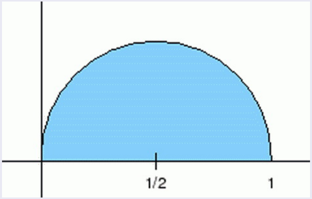
$$\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Primjer

Ako je D polukrug u prvom kvadrantu omeđen kružnicom $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ i osi x, izračunajte

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Radi se o volumenu tijela što ga iz polukugle $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ izreže cilindar s bazom D.



Primjer

Uvrštavanjem supstitucije u jednadžbu zadane kružnice dobijemo

$$\left(r\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + (r\sin\varphi)^2 = \frac{1}{4},$$

Primjer

Uvrštavanjem supstitucije u jednadžbu zadane kružnice dobijemo

$$\left(r\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)^2+(r\sin\varphi)^2=\frac{1}{4},$$

odnosno

$$r\,(r-\cos\varphi)=0$$

pa jednadžba zadane kružnice u polarnim koordinatama glasi

$$r=\cos\varphi.$$

Primjer

Uvrštavanjem supstitucije u jednadžbu zadane kružnice dobijemo

$$\left(r\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + (r\sin\varphi)^2 = \frac{1}{4},$$

odnosno

$$r\,(r - \cos\varphi) = 0$$

pa jednadžba zadane kružnice u polarnim koordinatama glasi

$$r = \cos\varphi.$$

Dakle, područje D je opisano s

$$D = \left\{(r,\varphi) : \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, \cos\varphi]\right\}$$

Primjer

Dakle, imamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2}\, r \,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi = \left\{ \begin{array}{c} 1-r^2 = t \\ -2r\,\mathrm{dr} = \mathrm{dt} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} r & 0 & \cos\varphi \\ \hline t & 1 & \sin^2\varphi \end{array} \right\}$$

Primjer

Dakle, imamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2}\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \left\{ \begin{array}{c} 1 - r^2 = t \\ -2r\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \end{array} \;\begin{array}{c||c|c} r & 0 & \cos\varphi \\ \hline t & 1 & \sin^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin^2\varphi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\sin^2\varphi} \mathrm{d}\varphi = \{\sin\varphi > 0\}$$

Primjer

Dakle, imamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2}\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \left\{ \begin{array}{c} 1 - r^2 = t \\ -2r\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \end{array} \begin{array}{c||c|c} r & 0 & \cos\varphi \\ \hline t & 1 & \sin^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin^2\varphi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\sin^2\varphi} \mathrm{d}\varphi = \{\sin\varphi > 0\}$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\varphi - 1\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\varphi\right) \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

Primjer

Dakle, imamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2}\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \left\{ \begin{array}{c} 1-r^2 = t \\ -2r\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \end{array} \quad \begin{array}{c||c|c} r & 0 & \cos\varphi \\ \hline t & 1 & \sin^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin^2\varphi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\sin^2\varphi} \mathrm{d}\varphi = \{\sin\varphi > 0\}$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\varphi - 1\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2\varphi\right) \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \{\cos\varphi = u\} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \int_1^{0} \left(1-u^2\right) \mathrm{d}u = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.$$

Nepravi integral

- Nepravi integrali funkcija više varijabli se definiraju pomoću limesa, slično kao i nepravi integrali funkcije jedne varijable.

Nepravi integral

- Nepravi integrali funkcija više varijabli se definiraju pomoću limesa, slično kao i nepravi integrali funkcije jedne varijable.
- Pri tome nastupaju razni fenomeni i problemi slični onima koji se javljaju kod proučavanja limesa funkcija više varijabli.

Nepravi integral

- Nepravi integrali funkcija više varijabli se definiraju pomoću limesa, slično kao i nepravi integrali funkcije jedne varijable.
- Pri tome nastupaju razni fenomeni i problemi slični onima koji se javljaju kod proučavanja limesa funkcija više varijabli.
- Ovdje ih nećemo detaljno izučavati, već navodimo samo jedan zanimljivi primjer:

Nepravi integral

- Nepravi integrali funkcija više varijabli se definiraju pomoću limesa, slično kao i nepravi integrali funkcije jedne varijable.
- Pri tome nastupaju razni fenomeni i problemi slični onima koji se javljaju kod proučavanja limesa funkcija više varijabli.
- Ovdje ih nećemo detaljno izučavati, već navodimo samo jedan zanimljivi primjer:

Primjer

Izračunajmo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

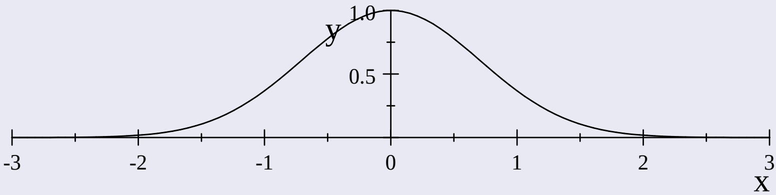
Nepravi integral

Primjer

Radi se o površini između krivulja $y = e^{-x^2}$ *i osi* x*.*

Primjer

Radi se o površini između krivulja $y = e^{-x^2}$ *i osi* x.

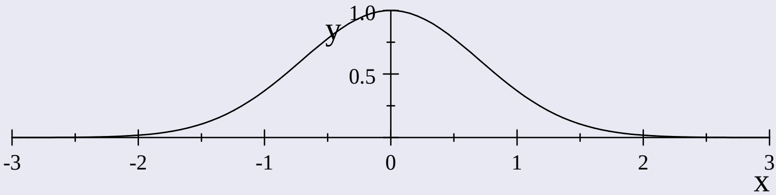


$$y = e^{-x^2}$$

Nepravi integral

Primjer

Radi se o površini između krivulja $y = e^{-x^2}$ *i osi* x.



$$y = e^{-x^2}$$

Ovaj integral se koristi u teoriji vjerojatnosti. Vidi link.

Primjer

Zbog parnosti podintegralne funkcije i prelaska na limes vrijedi

$$I = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = 2\lim_{r\to\infty}\int_0^{r} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \equiv 2\lim_{r\to\infty} I_r .$$

Nepravi integral

Primjer

Zbog parnosti podintegralne funkcije i prelaska na limes vrijedi

$$I = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = 2\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \equiv 2\lim_{r\to\infty} I_r .$$

Ako $\lim\limits_{r\to\infty} I_r$ *postoji, onda je*

$$\left(\lim_{r\to\infty} I_r\right)^2 = \lim_{r\to\infty} I_r^2$$

Nepravi integral

Primjer

Zbog parnosti podintegralne funkcije i prelaska na limes vrijedi

$$I = 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^r e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \equiv 2\lim_{r\to\infty} I_r.$$

Ako $\lim\limits_{r\to\infty} I_r$ *postoji, onda je*

$$\left(\lim_{r\to\infty} I_r\right)^2 = \lim_{r\to\infty} I_r^2$$

pa je

$$I = 2\sqrt{\lim_{r\to\infty} I_r^2}.$$

Primjer

Vrijedi

$$\begin{aligned} I_r^2 &= I_r \cdot I_r = \int\limits_0^r e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \cdot \int\limits_0^r e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int\limits_0^r \int\limits_0^r e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\ &= \iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,. \end{aligned}$$

gdje je područje integracije D kvadrat stranice r u prvom kvadrantu.

Nepravi integral

Primjer

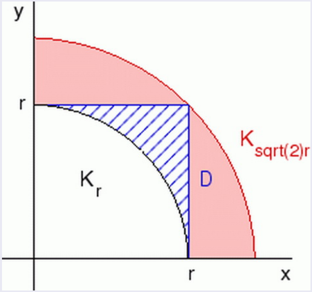
Vrijedi

$$
\begin{aligned}
I_r^2 &= I_r \cdot I_r = \int_0^r e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \cdot \int_0^r e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_0^r \int_0^r e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\
&= \iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.
\end{aligned}
$$

gdje je područje integracije D kvadrat stranice r u prvom kvadrantu. Neka je K_r četvrtina kruga u prvom kvadrantu koja je upisana kvadratu D, a $K_{\sqrt{2}r}$ četvrtina kruga u prvom kvadrantu koja je opisana kvadratu D.

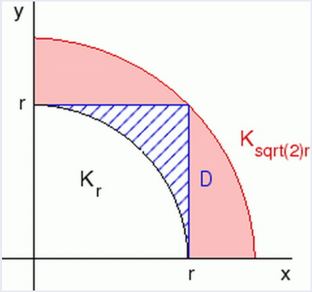
Nepravi integral

Primjer



Nepravi integral

Primjer



Kako je $e^{-\left(x^2+y^2\right)} > 0$ *i* $K_r \subset D \subset K_{\sqrt{2}r}$, *vrijedi*

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq I_r^2 \leq \iint\limits_{K_{\sqrt{2}r}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Primjer

U polarnim koordinatama vrijedi

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{r} e^{-t^2}\,t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi$$

(koristimo polarne koordinate (t, φ) *jer* r *već označava duljinu stranice kvadrata i javlja se u granicama integracije).*

Primjer

U polarnim koordinatama vrijedi

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{r} e^{-t^2}\,t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi$$

(koristimo polarne koordinate (t,φ) *jer* r *već označava duljinu stranice kvadrata i javlja se u granicama integracije).*
Uz supstituciju $t^2 = u$ *vrijedi*

$$\int e^{-t^2}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int e^{-u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^{-u} = -\frac{1}{2}e^{-t^2}.$$

Primjer

Dakle,

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\Bigg|_0^r = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}+1\right)$$

pa vrijedi

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \to \frac{\pi}{4} \text{ kada } r \to \infty.$$

Nepravi integral

Primjer

Dakle,

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\Big|_0^r = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}+1\right)$$

pa vrijedi

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \longrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ kada } r \longrightarrow \infty.$$

Slično vrijedi i

$$\iint\limits_{K_{\sqrt{2}r}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-2r^2}+1\right) \longrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ kada } r \longrightarrow \infty.$$

Nepravi integral

Primjer

Sada relacija

$$\iint\limits_{K_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq I_r^2 \leq \iint\limits_{K_{\sqrt{2}r}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

i Teorem o ukliještenoj funkciji povlače

$$\lim_{r\to\infty} I_r^2 = \frac{\pi}{4}$$

pa je

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Trostruki integral nad kvadrom

- Trostruki integral neprekidne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se računa slično kao i dvostruki.

Trostruki integral nad kvadrom

- Trostruki integral neprekidne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se računa slično kao i dvostruki.
- Ako je područje integracije kvadar

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, g],$$

onda je

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{dz} \right) \mathrm{dy} \right] \mathrm{dx}$$

Trostruki integral nad kvadrom

- Trostruki integral neprekidne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se računa slično kao i dvostruki.
- Ako je područje integracije kvadar

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, g],$$

onda je

$$\iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

- Pri tome je $dV = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ **element volumena**.

Trostruki integral nad kvadrom

- Trostruki integral neprekidne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se računa slično kao i dvostruki.
- Ako je područje integracije kvadar

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, g],$$

onda je

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d \left(\int\limits_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{dz} \right) \mathrm{dy} \right] \mathrm{dx}$$

- Pri tome je $dV = \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$ **element volumena**.
- Kao i kod dvostrukog integrala, mogući su razni redosljedi integriranja.

Trostruki integral nad neravnim

Ako je područje D određeno relacijama

$$\begin{aligned} a &\le x \le b \\ h_1(x) &\le y \le h_2(x) \\ g_1(x,y) &\le z \le g_2(x,y) \end{aligned}$$

Trostruki integral nad neravnim

Ako je područje D određeno relacijama

$$\begin{array}{rcccl} a & \leq & x & \leq & b \\ h_1(x) & \leq & y & \leq & h_2(x) \\ g_1(x,y) & \leq & z & \leq & g_2(x,y) \end{array}$$

onda je

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{dV} = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left(\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{dz} \right) \mathrm{dy} \right] \mathrm{dx}\,.$$

Primjene trostrukog integrala

Tipične primjene trostrukog integrala su sljedeće:

- ako je $f(x, y, z)$ gustoća tijela koje zaprema područje D u točki $T = (x, y, z)$, onda je trostruki integral $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{dV}$ jednak masi tog dijela;

Primjene trostrukog integrala

Tipične primjene trostrukog integrala su sljedeće:

- ako je $f(x, y, z)$ gustoća tijela koje zaprema područje D u točki $T = (x, y, z)$, onda je trostruki integral $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{dV}$ jednak masi tog dijela;
- ako je $f(x, y, z) = 1$, onda trostruki integral daje volumen područja D

$$V(D) = \iiint\limits_D \mathrm{dV} = \int\limits_a^b \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,.$$

Primjene trostrukog integrala

Tipične primjene trostrukog integrala su sljedeće:

- ako je $f(x, y, z)$ gustoća tijela koje zaprema područje D u točki $T = (x, y, z)$, onda je trostruki integral $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{dV}$ jednak masi tog dijela;
- ako je $f(x, y, z) = 1$, onda trostruki integral daje volumen područja D

$$V(D) = \iiint\limits_D \mathrm{dV} = \int\limits_a^b \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,.$$

- Naime, integriranjem po z dobijemo ranije navedenu formulu

$$\int\limits_a^b \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left(g_2(x, y) - g_1(x, y)\right) \mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$$

za izračunavanje volumena preko dvostrukog integrala.

Primjer

Odredite volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ *i* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

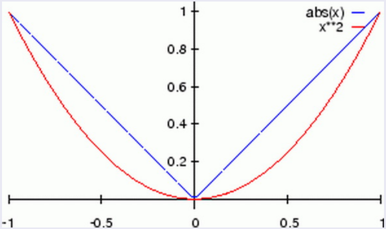
Primjer

Odredite volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ *i* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Radi se o volumenu područja između paraboloida i stošca.

Trostruki integral

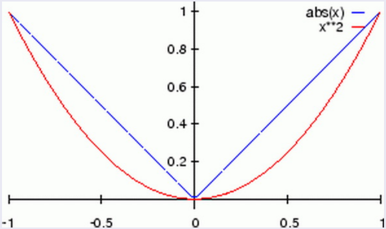
Primjer

Odredite volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ *i* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Radi se o volumenu područja između paraboloida i stošca. Presjek područja* D *s ravninom* $y = 0$ *je prikazan na slici:*



Primjer

Odredite volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ *i* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Radi se o volumenu područja između paraboloida i stošca. Presjek područja D s ravninom* $y = 0$ *je prikazan na slici:*



Za postavljanje integrala trebamo opisati područje D. Nađimo presjek zadanih ploha izjednačavajući jednadžbe po z:

Trostruki integral

Primjer

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ima rješenja $x = y = 0$ *i* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, *odnosno* $x^2 + y^2 = 1$.

Primjer

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ima rješenja $x = y = 0$ *i* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, *odnosno* $x^2 + y^2 = 1$.
Prvo rješenje je ishodište (u kojem se plohe očito sijeku).

Primjer

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ima rješenja $x = y = 0$ *i* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, *odnosno* $x^2 + y^2 = 1$.
Prvo rješenje je ishodište (u kojem se plohe očito sijeku).
Iz drugog rješenja vidimo da se plohe još sijeku u jediničnoj središnjoj kružnici u ravnini $z = 1$.

Trostruki integral

Primjer

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ima rješenja $x = y = 0$ *i* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, *odnosno* $x^2 + y^2 = 1$.
Prvo rješenje je ishodište (u kojem se plohe očito sijeku).
Iz drugog rješenja vidimo da se plohe još sijeku u jediničnoj središnjoj kružnici u ravnini $z = 1$.
Stoga imamo

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\,.$$

Trostruki integral

Primjer

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ima rješenja $x = y = 0$ *i* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, *odnosno* $x^2 + y^2 = 1$.
Prvo rješenje je ishodište (u kojem se plohe očito sijeku).
Iz drugog rješenja vidimo da se plohe još sijeku u jediničnoj središnjoj kružnici u ravnini $z = 1$.
Stoga imamo

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\,.$$

Integral ćemo riješiti prelaskom na cilindrične koordinate.

Cilindrične koordinate

Cilindrični koordinatni sustav, tj. **cilindrične koordinate** su zadane transformacijama

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z,$$

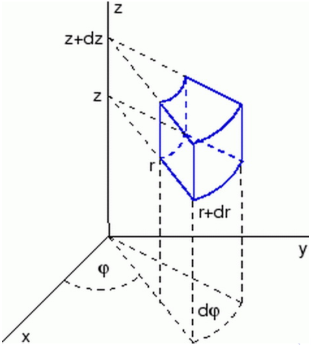
pri čemu je $r \geq 0$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$ ili $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Cilindrične koordinate

Cilindrični koordinatni sustav, tj. **cilindrične koordinate** su zadane transformacijama

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z,$$

pri čemu je $r \geq 0$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$ ili $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
Dakle, element volumena jednak je umnošku površine baze i visine, s time što se površina baze računa u polarnim koordinatama:



Dakle,

$$\mathrm{dV} = r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{dz}$$

Cilindrične koordinate

Dakle,

$$\mathrm{dV} = r \,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{dz}$$

pa je

$$\iiint\limits_D f\left(x, y, z\right) \mathrm{dV} = \iiint\limits_D f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right) r \,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{dz}\,.$$

Primjer

Izračunajmo volumen iz prethodnog primjera prelaskom na cilindrične koordinate:

Cilindrične koordinate

Primjer

Izračunajmo volumen iz prethodnog primjera prelaskom na cilindrične koordinate:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{r^2}^{r} \mathrm{dz}\, r\, \mathrm{dr}\, \mathrm{d}\varphi =$$

Cilindrične koordinate

Primjer

Izračunajmo volumen iz prethodnog primjera prelaskom na cilindrične koordinate:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{r^2}^{r} \mathrm{d}z\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int_0^1 \left(z\Big|_{r^2}^{r} \right) r\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 \left(r^2 - r^3 \right) \mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.$$

Sferne koordinate

Sferne koordinate ili **prostorne polarne koordinate** su zadane transformacijama

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

pri čemu je $r \geq 0$, a obično se odabere $\theta \in [0, \pi]$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Sferne koordinate

Sferne koordinate ili **prostorne polarne koordinate** su zadane transformacijama

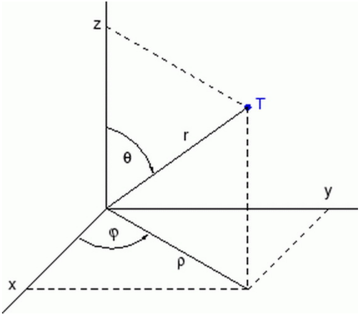
$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

pri čemu je $r \geq 0$, a obično se odabere $\theta \in [0, \pi]$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
Uz oznaku $\rho = r \sin\theta$ možemo pisati

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi, \\ y &= \rho \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

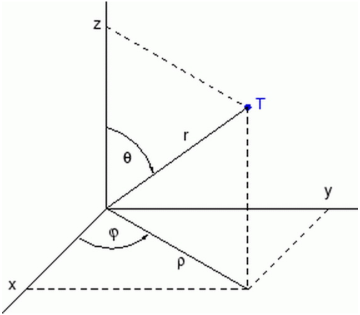
Sferne koordinate

Sferni kordinatni sustav:



Sferne koordinate

Sferni kordinatni sustav:



Za prelazak iz kartezijevog u sferni sustav, koristimo relacije

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Primjer

Jedna verzija sfernog koordinatnog sustava koji je često u upotrebi su zemljopisne karte.

Primjer

Jedna verzija sfernog koordinatnog sustava koji je često u upotrebi su zemljopisne karte.

- *Udaljenost r se prikazuje kao nadmorska visina,*

Sferne koordinate

Primjer

Jedna verzija sfernog koordinatnog sustava koji je često u upotrebi su zemljopisne karte.

- *Udaljenost r se prikazuje kao nadmorska visina,*
- *kut φ je zemljopisna dužina koja se mjeri istočno i zapadno od Greenwicha, što odgovara odabiru $\varphi \in [-\pi, \pi]$*

Primjer

Jedna verzija sfernog koordinatnog sustava koji je često u upotrebi su zemljopisne karte.

- *Udaljenost r se prikazuje kao nadmorska visina,*
- *kut φ je zemljopisna dužina koja se mjeri istočno i zapadno od Greenwicha, što odgovara odabiru $\varphi \in [-\pi, \pi]$*
- *kut θ je zemljopisna širina koja se mjeri sjeverno i južno od ekvatora, što odgovara odabiru $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Sferne koordinate

Primjer

Jedna verzija sfernog koordinatnog sustava koji je često u upotrebi su zemljopisne karte.

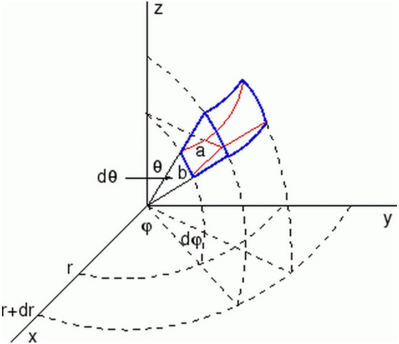
- *Udaljenost r se prikazuje kao nadmorska visina,*
- *kut φ je zemljopisna dužina koja se mjeri istočno i zapadno od Greenwicha, što odgovara odabiru $\varphi \in [-\pi, \pi]$*
- *kut θ je zemljopisna širina koja se mjeri sjeverno i južno od ekvatora, što odgovara odabiru $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*
- *Odabir $\theta \in [0, \pi]$ je matematički povoljniji jer je tada $\sin\theta \geq 0$.*

Sferne koordinate

Za računanje trostrukog integrala prelaskom na sferne koordinate, potrebno je izračunati element volumena dV.

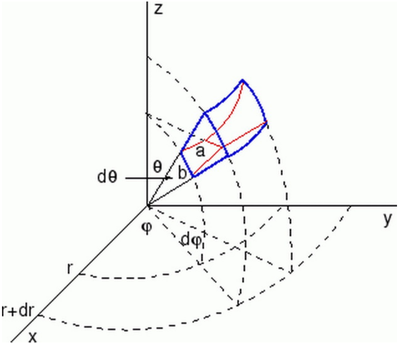
Sferne koordinate

Za računanje trostrukog integrala prelaskom na sferne koordinate, potrebno je izračunati element volumena dV.



Sferne koordinate

Za računanje trostrukog integrala prelaskom na sferne koordinate, potrebno je izračunati element volumena dV.



Vidimo da je

$$\mathrm{dV} \approx ab\,\mathrm{dr},$$

pri čemu je

$$a = r \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi, \qquad b = r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Sferne koordinate

Dakle,

$$\mathrm{dV} \approx r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{dr} \, \mathrm{d}\varphi \, .$$

Dakle,

$$\mathrm{dV} \approx r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{dr} \, \mathrm{d}\varphi \, .$$

Točan izraz za dV sadrži još i druge članove, no oni teže k nuli brže nego glavni izraz pa ih izostavljamo.

Sferne koordinate

Dakle,

$$\mathrm{dV} \approx r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{dr} \,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Točan izraz za dV sadrži još i druge članove, no oni teže k nuli brže nego glavni izraz pa ih izostavljamo.
Dakle, u sfernim koordinatama vrijedi

$$\iiint\limits_D f\,(x, y, z)\,\mathrm{dV} =$$

$$= \iiint\limits_D f\,(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{dr} \,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Sferne koordinate

Primjer

Volumen kugle radijusa R jednak je

$$\begin{aligned} V &= \iiint\limits_K 1\cdot \mathrm{dV} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int\limits_0^{R} r^2\,\mathrm{d}r = \varphi|_{-\pi}^{\pi}\,(-\cos\theta)\,|_0^{\pi}\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \\ &= \frac{4}{3}R^3\pi. \end{aligned}$$

Zamjena varijabli

- Prelasci iz Kartezijevih u polarne, cilindrične ili sferne koordinate su primjeri zamjene varijabli.

Zamjena varijabli

- Prelasci iz Kartezijevih u polarne, cilindrične ili sferne koordinate su primjeri zamjene varijabli.
- Kod svake takve zamjene potrebno je uzeti u obzir diferencijal, odnosno element površine / volumena.

Zamjena varijabli

- Prelasci iz Kartezijevih u polarne, cilindrične ili sferne koordinate su primjeri zamjene varijabli.
- Kod svake takve zamjene potrebno je uzeti u obzir diferencijal, odnosno element površine / volumena.
- Bez dokaza navodimo teorem o zamjeni varijabli za trostruki integral. Analogni rezultati vrijede i u drugim dimenzijama.

Zamjena varijabli

Teorem (o zamjeni varijabli)

Neka je zadan integral

$$I = \iiint\limits_{D} f\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^3$$

i neka je funkcija f neprekidna i integrabilna na skupu D.

Zamjena varijabli

Teorem (o zamjeni varijabli)

Neka je zadan integral

$$I = \iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^3$$

i neka je funkcija f neprekidna i integrabilna na skupu D.
Neka je $D' \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka su $\alpha, \beta, \gamma : D' \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije za koje je preslikavanje $p : D' \to D$ definirano s

$$p(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$$

bijekcija.

Teorem (o zamjeni varijabli)

Ako je **Jakobijan** *(***Jacobijeva matrica***)*

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial\alpha}{\partial w}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} & \frac{\partial\beta}{\partial w}\\ \frac{\partial\gamma}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial v} & \frac{\partial\gamma}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0, \qquad \forall (u,v,w)\in D',$$

Teorem (o zamjeni varijabli)

Ako je **Jakobijan** *(***Jacobijeva matrica***)*

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial\alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} & \frac{\partial\beta}{\partial w} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial v} & \frac{\partial\gamma}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall (u,v,w) \in D',$$

onda je

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{D'} f(\alpha(u,v,w), \beta(u,v,w), \gamma(u,v,w))\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

Zamjena varijabli

Teorem (o zamjeni varijabli)

Ako je **Jakobijan** *(***Jacobijeva matrica***)*

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial\alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} & \frac{\partial\beta}{\partial w} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial v} & \frac{\partial\gamma}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall (u,v,w) \in D',$$

onda je

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{D'} f(\alpha(u,v,w), \beta(u,v,w), \gamma(u,v,w))\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

x, y i z mogu biti varijable u bilo kojem sustavu (ne nužno Kartezijevom).

Zamjena varijabli

Primjer

Kod prelaska iz Kartezijevog u sferni koordinatni sustav možemo uzeti

$$\begin{aligned} u &= r, & \alpha(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ v &= \theta, & \beta(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ w &= \varphi, & \gamma(r,\theta,\varphi) &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Zamjena varijabli

Primjer

Kod prelaska iz Kartezijevog u sferni koordinatni sustav možemo uzeti

$$\begin{aligned} u &= r, \qquad & \alpha(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ v &= \theta, \qquad & \beta(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ w &= \varphi, \qquad & \gamma(r,\theta,\varphi) &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Nadalje, ako je $D = \mathbb{R}^3$, *onda je* $D' = [0,\infty) \times [0,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

Zamjena varijabli

Primjer

Kod prelaska iz Kartezijevog u sferni koordinatni sustav možemo uzeti

$$\begin{aligned} u &= r, & \alpha(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ v &= \theta, & \beta(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ w &= \varphi, & \gamma(r,\theta,\varphi) &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Nadalje, ako je $D = \mathbb{R}^3$, onda je $D' = [0,\infty) \times [0,\pi] \times [-\pi,\pi]$.
Iz definicije sfernih koordinata vidimo da je preslikavanje

$$p : D \to D', \qquad p(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$$

bijekcija.

Zamjena varijabli

Primjer

Kod prelaska iz Kartezijevog u sferni koordinatni sustav možemo uzeti

$$\begin{aligned} u &= r, & \alpha(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ v &= \theta, & \beta(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ w &= \varphi, & \gamma(r,\theta,\varphi) &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Nadalje, ako je $D = \mathbb{R}^3$*, onda je* $D' = [0,\infty) \times [0,\pi] \times [-\pi,\pi]$.
Iz definicije sfernih koordinata vidimo da je preslikavanje

$$p : D \to D', \qquad p(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$$

bijekcija.
Funkcije α, β, γ *su diferencijabilne, a Jakobijan je:*

Primjer

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial r} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\beta}{\partial r} & \frac{\partial\beta}{\partial\theta} & \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial r} & \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} & \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Zamjena varijabli

Primjer

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial r} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\beta}{\partial r} & \frac{\partial\beta}{\partial\theta} & \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial r} & \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} & \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Zbog uvjeta $\theta \in [0, \pi]$ *imamo* $\sin\theta \geq 0$ *pa je*

$$|J| = \left|r^2\sin\theta\right| = r^2\sin\theta.$$

Zamjena varijabli

Primjer

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial r} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\beta}{\partial r} & \frac{\partial\beta}{\partial\theta} & \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial r} & \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} & \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Zbog uvjeta $\theta \in [0, \pi]$ *imamo* $\sin\theta \geq 0$ *pa je*

$$|J| = \left|r^2\sin\theta\right| = r^2\sin\theta.$$

Zadatak

Izvedite Jakobijan za cilindrične koordinate.

Primjer

Za $n = 2$ Teorem o zamjeni varijabli primjenjujemo tako što zanemarimo treću varijablu pa Jakobijan postaje determinanta materice drugog reda.

Zamjena varijabli

Primjer

Za $n = 2$ Teorem o zamjeni varijabli primjenjujemo tako što zanemarimo treću varijablu pa Jakobijan postaje determinanta materice drugog reda. Npr. za prelazak iz Kartezijevih u polarne koordinate vrijedi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \equiv \alpha(r, \varphi), \\ y &= r\sin\varphi \equiv \beta(r, \varphi). \end{aligned}$$

Primjer

Za $n = 2$ Teorem o zamjeni varijabli primjenjujemo tako što zanemarimo treću varijablu pa Jakobijan postaje determinanta materice drugog reda. Npr. za prelazak iz Kartezijevih u polarne koordinate vrijedi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \equiv \alpha(r,\varphi), \\ y &= r\sin\varphi \equiv \beta(r,\varphi). \end{aligned}$$

Stoga je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial r} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\beta}{\partial r} & \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Primjer

Za $n = 2$ Teorem o zamjeni varijabli primjenjujemo tako što zanemarimo treću varijablu pa Jakobijan postaje determinanta materice drugog reda. Npr. za prelazak iz Kartezijevih u polarne koordinate vrijedi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \equiv \alpha(r,\varphi), \\ y &= r\sin\varphi \equiv \beta(r,\varphi). \end{aligned}$$

Stoga je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial r} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\beta}{\partial r} & \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

pa zbog $r \geq 0$ imamo $|J| = r$.

Momenti i težišta

- Promotrimo ravnu ploču $\mathcal{P}$ gustoće $\rho\left(x, y\right)$ koja zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^2$.

Momenti i težišta

- Promotrimo ravnu ploču $\mathcal{P}$ gustoće $\rho(x, y)$ koja zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^2$.
- Podijelimo ploču na *male* pravokutnike P_{ij} površine $\Delta P = \Delta x \Delta y$.

Momenti i težišta

- Promotrimo ravnu ploču $\mathcal{P}$ gustoće $\rho(x, y)$ koja zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^2$.
- Podijelimo ploču na *male* pravokutnike P_{ij} površine $\Delta P = \Delta x \Delta y$.
- Označimo središte pravokutnika P_{ij} s $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$. Masa m_{ij} tada je približno jednaka

$$m_{ij} \approx \rho\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right) \Delta P.$$

- Promotrimo ravnu ploču $\mathcal{P}$ gustoće $\rho(x,y)$ koja zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^2$.
- Podijelimo ploču na *male* pravokutnike P_{ij} površine $\Delta P = \Delta x \Delta y$.
- Označimo središte pravokutnika P_{ij} s $\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)$. Masa m_{ij} tada je približno jednaka
$$m_{ij} \approx \rho\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right) \Delta P.$$
- Momenti oko osi x i osi y su približno jednaki
$$\begin{aligned} \left[M_x\right]_{ij} &\approx m_{ij}\overline{y}_{ij} = \left[\rho\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right) \Delta P\right] \overline{y}_{ij}, \\ \left[M_y\right]_{ij} &\approx m_{ij}\overline{x}_{ij} = \left[\rho\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right) \Delta P\right] \overline{x}_{ij}. \end{aligned}$$

Momenti i težišta

- Sumirajući po svim i i j te prelaskom na limes kada ΔP teži k nuli dobijemo

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i,j} m_{ij} = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{dP}, \\ M_x &= \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i,j} [M_x]_{ij} = \iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{dP}, \\ M_y &= \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i,j} [M_y]_{ij} = \iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{dP}, \end{aligned}$$

pri čemu su m, M_x i M_y redom masa ploče $\mathcal{P}$, moment ploče $\mathcal{P}$ oko osi x i moment ploče $\mathcal{P}$ oko osi y.

Momenti i težišta

- Sumirajući po svim i i j te prelaskom na limes kada ΔP teži k nuli dobijemo

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i,j} m_{ij} = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{dP}, \\ M_x &= \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i,j} [M_x]_{ij} = \iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{dP}, \\ M_y &= \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i,j} [M_y]_{ij} = \iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{dP}, \end{aligned}$$

  pri čemu su m, M_x i M_y redom masa ploče $\mathcal{P}$, moment ploče $\mathcal{P}$ oko osi x i moment ploče $\mathcal{P}$ oko osi y.
- Koordinate težišta ploče $\mathcal{P}$ su jednake

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Primjer

Odredite težište polukružne ploče čija je gustoća jednaka udaljenosti od središta kruga.

Primjer

Odredite težište polukružne ploče čija je gustoća jednaka udaljenosti od središta kruga.
Ako središte kruga smjestimo u ishodište, jednadžba kruga glasi $x^2 + y^2 = a^2$ *pa je gustoća ploče u točki* (x, y) *dana formulom*

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Primjer

Odredite težište polukružne ploče čija je gustoća jednaka udaljenosti od središta kruga.
Ako središte kruga smjestimo u ishodište, jednadžba kruga glasi $x^2 + y^2 = a^2$ *pa je gustoća ploče u točki* (x, y) *dana formulom*

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prelaskom na polarne kordinate imamo

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, \mathrm{dP} = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{dP} = \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \cdot r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

Primjer

Kako su ploča i funkcija gustoće simetrične s obzirom na os y težište se nalazi na y-osi, odnosno vrijedi $\overline{x} = 0$.

Primjer

Kako su ploča i funkcija gustoće simetrične s obzirom na os y težište se nalazi na y-osi, odnosno vrijedi $\overline{x} = 0$.

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\rho\left(x, y\right) \mathrm{dP} = \frac{3}{\pi a^3} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{a} r \sin\varphi \cdot r \cdot r \, \mathrm{dr}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{3a}{2\pi}.$$

Primjer

Kako su ploča i funkcija gustoće simetrične s obzirom na os y težište se nalazi na y-osi, odnosno vrijedi $\overline{x} = 0$.

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho\left(x, y\right) \mathrm{dP} = \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \sin \varphi \cdot r \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{3a}{2\pi}.$$

Dakle, težište se nalazi u točki $T = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$.

Primjer

Kako su ploča i funkcija gustoće simetrične s obzirom na os y težište se nalazi na y-osi, odnosno vrijedi $\overline{x} = 0$.

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \iint\limits_{D} y\rho\left(x, y\right) \mathrm{dP} = \frac{3}{\pi a^3} \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{a} r \sin\varphi \cdot r \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{3a}{2\pi}.$$

Dakle, težište se nalazi u točki $T = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$.

Zadatak

Nađite težište trokutaste ploče s vrhovima $\left(0, 0\right)$, $\left(2, 0\right)$ i $\left(0, 1\right)$ i funkcijom gustoće $\rho\left(x, y\right) = 1 + 2x + y$.

Moment inercije

- **Moment inercije** ili **moment drugog reda** čestice mase m oko osi x definiran je kao md^3 pri čemu je d udaljenost čestice od osi.

Moment inercije

- **Moment inercije** ili **moment drugog reda** čestice mase m oko osi x definiran je kao md^3 pri čemu je d udaljenost čestice od osi.
- Kao i prije podijelimo ploču na pravokutnike, zbrojimo momente inercije oko osi x svih pravokutnika te pređemo na limes kada površine pravokutnika teže u nulu.

Moment inercije

- **Moment inercije** ili **moment drugog reda** čestice mase m oko osi x definiran je kao md^3 pri čemu je d udaljenost čestice od osi.
- Kao i prije podijelimo ploču na pravokutnike, zbrojimo momente inercije oko osi x svih pravokutnika te pređemo na limes kada površine pravokutnika teže u nulu.
- Na ovaj način dobijemo **moment inercije ploče** P **oko osi** x:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho\left(x, y\right) \mathrm{dP}\,.$$

Moment inercije

- **Moment inercije** ili **moment drugog reda** čestice mase m oko osi x definiran je kao md^3 pri čemu je d udaljenost čestice od osi.
- Kao i prije podijelimo ploču na pravokutnike, zbrojimo momente inercije oko osi x svih pravokutnika te pređemo na limes kada površine pravokutnika teže u nulu.
- Na ovaj način dobijemo **moment inercije ploče** P **oko osi** x:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, \mathrm{dP}.$$

- Slično dobijemo i izraz za **moment inercije ploče** P **oko osi** y:

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, \mathrm{dP}.$$

- **Moment inercije ploče** P **oko ishodišta** definiramo kao

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y\right) \mathrm{dP}\,.$$

Moment inercije

- **Moment inercije ploče** P **oko ishodišta** definiramo kao

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y\right) \mathrm{dP}\,.$$

- Primjetimo da vrijedi

$$I_0 = I_x + I_y\,.$$

Primjer

Nađite momente intercije homogenog diska gustoće ρ, radijusa a s centrom u ishodištu.

Moment inercije

Primjer

Nađite momente intercije homogenog diska gustoće ρ, radijusa a s centrom u ishodištu.
Rub područja integracije je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ pa u polarnim koordinatama imamo

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y\right) \mathrm{dP} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\pi\rho a^4.$$

Primjer

Nađite momente intercije homogenog diska gustoće ρ, radijusa a s centrom u ishodištu.
Rub područja integracije je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ pa u polarnim koordinatama imamo

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y\right) \mathrm{dP} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\pi\rho a^4.$$

Zbog simetrije je $I_x = I_y$ iz čega slijedi

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{4}\pi\rho a^4.$$

Primjer

Uočimo da je masa diska jednaka

$$m = \rho \pi a^2$$

pa možemo pisati

$$I_0 = \frac{1}{2} m a^2.$$

Primjer

Uočimo da je masa diska jednaka

$$m = \rho \pi a^2$$

pa možemo pisati

$$I_0 = \frac{1}{2} m a^2.$$

Dakle, povećamo li masu ili radijus diska, povećat će se i moment inercije. Što je momen inercije veći, to je teže pokretanje i zaustavljanje rotacije diska oko osovine.

Momenti tijela

- Promotrimo trodimenzionalni slučaj tijela Ω gustoće $\rho\left(x, y, z\right)$ koje zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^3$.

Momenti tijela

- Promotrimo trodimenzionalni slučaj tijela Ω gustoće $\rho(x, y, z)$ koje zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^3$.
- Sličnim razmatranjem dobijemo da je masa tijela jednaka

$$m = \iiint\limits_D \rho(x, y, z) \, \mathrm{dV},$$

pri čemu je dV element volumena kao i prije.

Momenti tijela

- Promotrimo trodimenzionalni slučaj tijela Ω gustoće $\rho(x, y, z)$ koje zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^3$.
- Sličnim razmatranjem dobijemo da je masa tijela jednaka

$$m = \iiint\limits_D \rho(x, y, z)\,\mathrm{dV},$$

pri čemu je dV element volumena kao i prije.
- Momenti oko koordinatnih ravnina su redom

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint\limits_D x\rho(x, y, z)\,\mathrm{dV}, \\ M_{xz} &= \iiint\limits_D y\rho(x, y, z)\,\mathrm{dV}, \\ M_{xy} &= \iiint\limits_D z\rho(x, y, z)\,\mathrm{dV}. \end{aligned}$$

- Težište se nalazi u točki $T = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ gdje je

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Momenti tijela

- Težište se nalazi u točki $T = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ gdje je

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

- Momenti inercije oko koordinatnih osiju su

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint\limits_D \left(y^2 + z^2\right) \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{dV}, \\ I_y &= \iiint\limits_D \left(x^2 + z^2\right) \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{dV}, \\ I_z &= \iiint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{dV}. \end{aligned}$$

Primjer

Nađite težište tijela homogene gustoće ρ *koje je omeđeno plohom* $z = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}$ *i ravninama* $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ *i* $z = 0$.

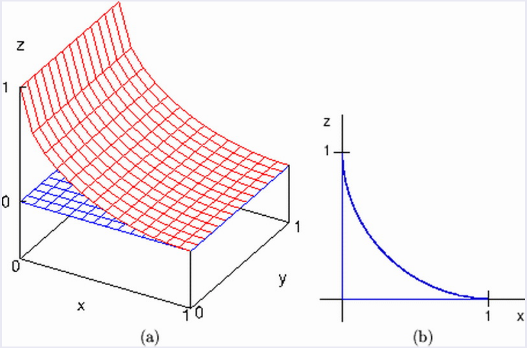
Momenti tijela

Primjer

Nađite težište tijela homogene gustoće ρ *koje je omeđeno plohom* $z = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}$ *i ravninama* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $y = 1$ *i* $z = 0$*.*
Na slici (a) je prikazano tijelo (koje ima oblik idealne naprave za blokadu kotača), a na slici (b) je projekcija tijela na ravninu xz

Primjer

Nađite težište tijela homogene gustoće ρ koje je omeđeno plohom
$z = 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}$ *i ravninama* $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ *i* $z = 0$.
Na slici (a) je prikazano tijelo (koje ima oblik idealne naprave za blokadu kotača), a na slici (b) je projekcija tijela na ravninu xz



Momenti tijela

Primjer

Tijelo zaprema područje

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2} \right\}.$$

Momenti tijela

Primjer

Tijelo zaprema područje

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2} \right\}.$$

Masa tijela jednaka je

$$m = \iiint\limits_{D} \rho \, \mathrm{dV} = \rho \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} \mathrm{dz} \, \mathrm{dy} \, \mathrm{dx} = \rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Do rješenja možemo doći i jednostavnije: budući da ovo tijelo ima homoegnu gustoću, masa je jednaka umnošku gustoće i volumena.

Momenti tijela

Primjer

Tijelo zaprema područje

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{1-(x-1)^2} \right\}.$$

Masa tijela jednaka je

$$m = \iiint\limits_D \rho \, \mathrm{dV} = \rho \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} \mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Do rješenja možemo doći i jednostavnije: budući da ovo tijelo ima homoegnu gustoću, masa je jednaka umnošku gustoće i volumena. Volumen V jednak je površini baze P (slika b) i visine koja je jednaka 1. P je jednaka razlici površine jediničnog kvadrata i četvrtine površine jediničnog kruga. Dakle, $V = P \cdot 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Primjer

Vrijedi

$$M_{xz} = \iiint\limits_{D} \rho y \,\mathrm{dV} = \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

pa je

$$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{2}.$$

Primjer

Vrijedi

$$M_{xz} = \iiint_D \rho y \,\mathrm{dV} = \frac{1}{2}\rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

pa je

$$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{2}.$$

Ovo je bilo za očekivati, s obzirom da tijelo ima homogenu gustoću i simetrično je s obzirom na pravac $y = \frac{1}{2}$.

Momenti tijela

Primjer

Nadalje,

$$M_{xy} = \iiint\limits_D \rho z \,\mathrm{dV} = \rho \frac{10 - 3\pi}{12}$$

pa je $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{10-3\pi}{3(4-\pi)}$.

Momenti tijela

Primjer

Nadalje,

$$M_{xy} = \iiint\limits_D \rho z \,\mathrm{dV} = \rho \frac{10 - 3\pi}{12}$$

pa je $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{10-3\pi}{3(4-\pi)}$.
Zbog simetrije mora vrijediti $\overline{x} = \overline{z}$ *pa se težište nalazi u točki*

$$T = \left(\frac{10 - 3\pi}{3\,(4 - \pi)}, \frac{1}{2}, \frac{10 - 3\pi}{3\,(4 - \pi)} \right).$$

Primjer

Nadalje,

$$M_{xy} = \iiint\limits_{D} \rho z \,\mathrm{dV} = \rho \frac{10 - 3\pi}{12}$$

pa je $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{10-3\pi}{3(4-\pi)}$.
Zbog simetrije mora vrijediti $\overline{x} = \overline{z}$ *pa se težište nalazi u točki*

$$T = \left(\frac{10 - 3\pi}{3\,(4 - \pi)}, \frac{1}{2}, \frac{10 - 3\pi}{3\,(4 - \pi)} \right).$$

Zadatak

Nađite težište tijela homogene gustoće koje je omeđeno paraboličkim cilindrom $y^2 = x$ *i ravninama* $x = 1$, $z = 0$ *i* $z = x$.